UNIVERSITY OF OSLO

Faculty of Mathematics and Natural Sciences

Exam in: Introduction to robotics (INF 3480)
Day of exam: 28th of may at 09:00
Exam hours: 09:00 – 12:00 (3 hours)
This examination paper consists of 4 page(s).
Appendices: None
Permitted materials:

a. Mark W. Spong, Seth Hutchinson, M. Vidyasagar: *Robot Modeling and Control*, 2005. Wiley. ISBN: 978-0-471-64990-8.
b. Karl Rottmann, Matematisk Formelsamling

Make sure that your copy of this examination paper is complete before answering.

Quest. 1	10%
Quest. 2	20%
Quest. 3	20%
Quest. 4	20%
Quest. 5	25%
Quest. 6	5%
totalt:	100%

1) (10%)
   a. Make a figure that shows the main elements that a robotic system typically can consist of. Explain with few sentences each element of such a system.
   b. Explain what a robots degrees of freedom tell us. How many degrees of freedom are necessary to reach any given position with an arbitrary orientation within the workspace of the robot?
   c. Prismatic joints are denoted by P and rotational joints by R. Which five different combinations of the first three joints for tool positioning are most common within robotic systems? What name do these combinations have and how are they characterized?
   d. How would you derive the orientation of the tool coordinate frame of a robot with reference to the robot base coordinate system in terms of a rotation matrix based on ZYZ-Euler representation?
   e. How is a total rotation matrix calculated out of a set of sucessive rotations about axes in the current coordinate system and fixed axes in the base coordinate system respectively?

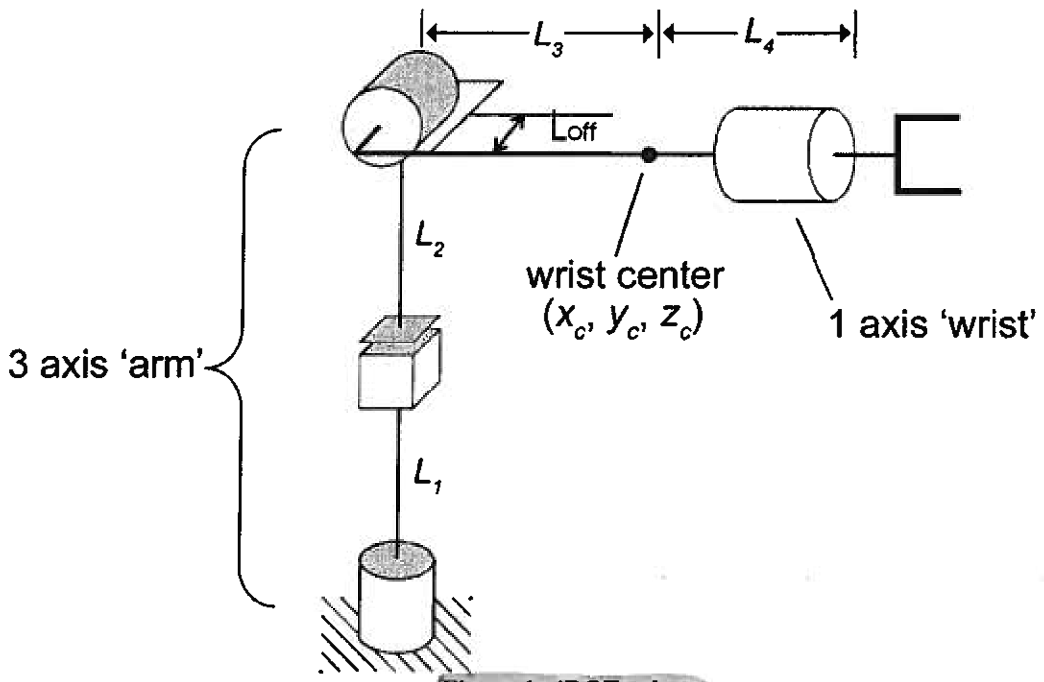


Figure 1: 4DOF robot

2) (20%) Write the homogeneous transformation that represents the forward kinematics of the system shown in figure 1 above using the Denavit-Hartenberg convention. Label all origins, links, and joints as appropriate (label the joint variables q_1 through q_4 starting at the base). Make sure that you include your DH table.
3) (20%) Assume that you can kinematically decouple the arm in figure 1 in a position kinematics and an orientation kinematics.
   a. Write an expression for the inverse *position* kinematics. Be sure to use

the wrist center as defined in figure 1.

b. Without concern for joint limitations, how many solutions are there to the inverse position kinematics? Explain each case including considerations of the workspace boundary.

c. Find restrictions on q_2 and q_3 that ensure that there is only one solution to the inverse position kinematics (assuming that the desired wrist center position is always strictly inside the workspace).

4) (20%) Write an expression for the Jacobian of the system in figure 1 and determine the singular configurations and prove that they are singular based upon your Jacobian.

5) (25%) What is understood by a systems dynamics? Explain why it is important to know the dynamics of a robotic system in order to control it.

a. The Euler-Lagrange equation of motion is:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \tau_j$$

Explain the different elements of this equation.

b. Show/explain how the Euler-Lagrange equation, shown in question 5a, for a robotic system can be written on the form:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial k}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial k}{\partial q_j} + \frac{\partial p}{\partial q_j} = \tau_j$$

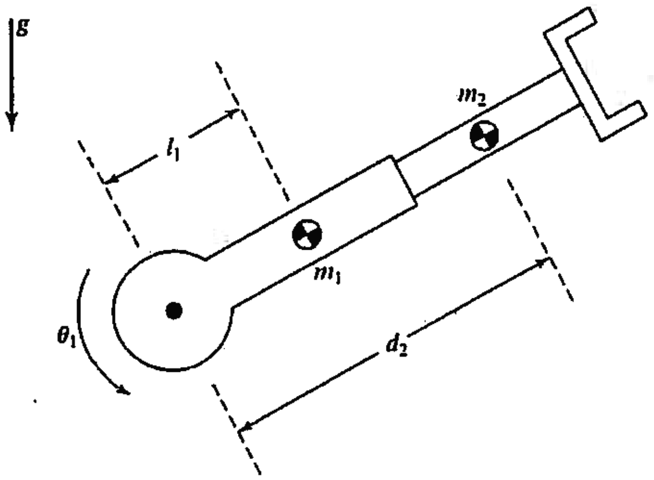
c. Derive the equations of motion for the robot in figure 2 by using the equation from question 5b, (Assume frictionless joints, and that the joint variables are θ_1 and d_2, centre of mass (C_1 og C_2- marked with circular black and white spot) to each arm link with a total mass of m_1 and m_2 respectively, the inertia tensor of link 1 and 2 is diagonal and expressed relative to the respective centre of masses as shown in figure 2)

d. Derive the equations of motion from question 5c in a compact matrix form as shown below. Show the details of the matrix D, V and G separately. What do the D, V and G matrix in physical terms express in the dynamic equation of motion?

$$D(q)\ddot{q} + V(q,\dot{q}) + G(q) = \tau$$

$V(q,\dot{q})$ equals $C(q,\dot{q})\dot{q}$

Explain how you would derive the C matrix isolating the first derivative of the joint angle as in $C(q,\dot{q})\dot{q}$?



$$c_1 I_1 = \begin{bmatrix} I_{xx1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz1} \end{bmatrix},$$

$$c_2 I_2 = \begin{bmatrix} I_{xx2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz2} \end{bmatrix},$$

Figure 2: 2DOF robot

---

6) (5%) Derive the Laplacetransform of the equation of motion for the system in question 5d given on the form: $D(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau$

Show schematically the closed loop control system using the Laplace transformed equations of motion and PDI feedback control. What is meant by a Single-Input Single-Output system (SISO-system). What makes the system at hand generally unsuited to be controlled as a Single-Input Single-Output system (SISO-system)?

UNIVERSITETET I OSLO

Det matematisk-naturvitenskapelige fakultet

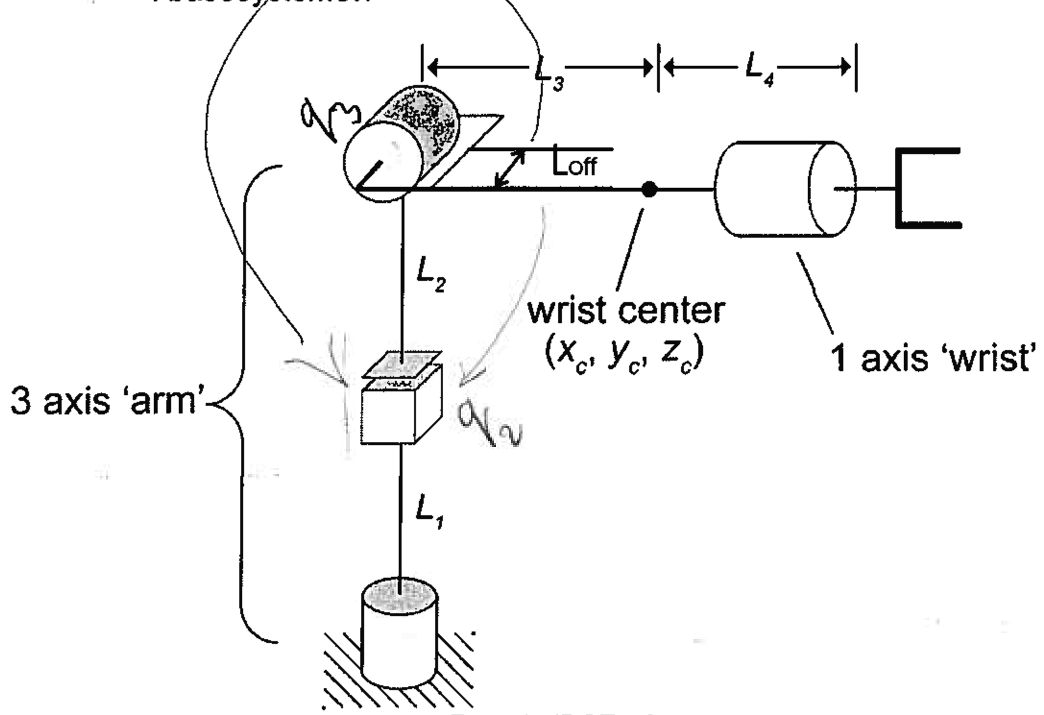
Eksamen i: Introduksjon til robotikk (INF 3480)
Eksamensdag: 28. mai kl. 09:00
Tid for eksamen: kl. 09:00 - 12:00 (3 timer).
Oppgavesettet er på 4 side(r)
Vedlegg: Ingen
Tillatte hjelpemidler:

- **a.** Mark W. Spong, Seth Hutchinson, M. Vidyasagar: *Robot Modeling and Control*, 2005. Wiley. ISBN: 978-0-471-64990-8.
- **b.** Karl Rottmann, Matematisk Formelsamling

Kontroller at oppgavesettet er komplett
før du begynner å besvare spørsmålene.

Oppg. 1	10%
Oppg. 2	20%
Oppg. 3	20%
Oppg. 4	20%
Oppg. 5	25%
Oppg. 6	5%
totalt:	100%

1) (10%)
   a. Sett opp en figur som viser de hovedelementer som et robotsystem typisk kan bestå av. Forklar kort hvert enkelt element.
   b. Forklar hva en robots frihetsgrader forteller oss. Hvor mange frihetsgrader er nødvendig for å oppnå en fritt gitt posisjon og orientering i rommet?
   c. Prismatiske ledd benevnes P og rotasjonsledd benevnes R. Hvilke fem ulike kombinasjoner av de tre første ledd for posisjonering er mest benyttet innen robotikken. Hva kalles disse og hvordan er de karakterisert?
   d. Vis hvordan du kommer frem til orienteringen til verktøykoordinatsystemet til en robot i forhold til robotens basekoordinatsystemet i form av en rotasjonsmatrise ved å bruke ZYZ-euler representasjon.
   e. Hvordan beregnes en samlet rotasjonsmatrise ut fra et sett av suksessive enkeltrotasjoner om hhv akser i gjeldende koordinatsystem og faste akser i basesystemet?



Figur 1: 4DOF robot

2) (20%) Sett opp den homogene transformasjon som representerer foroverkinematikken til 4DOF manipulatoren som er vist i figur 1 over ved å bruke Denavit-Hartenberg konvensjonen. Marker alle origo, armlenker (links) og ledd (joints) som er nødvendige (marker leddvariablene q_1 til q_4 med start i basekoordinatsystemet, angi positiv retning på leddvariablene). Husk på å inkludere tabellen over DH-parameterene.
3) (20%) Tenk deg at du kan isolere armen i figur 1 kinematisk i en posisjonskinematikk og en orienteringskinematikk.
   a. Sett opp et utrykk for inverse posisjonskinematikken. Husk på å benytte håndleddssenteret som definert i figur 1.

b. Uten å ta hensyn til leddbegrensninger, hvor mange løsninger er det for den inverse posisjonskinematikken? Forklar hvert tilfelle. Hva skjer i yttergrensene til arbeidsområdet til roboten ?

c. Finn restriksjonene/begrensningene på q_2 og q_3 som sikrer at det kun finnes én løsning til den inverse posisjonskinematikken (tenk deg at den ønskede posisjonen til håndleddssenteret alltid er innenfor arbeidsområdet).

4) (20%) Sett opp Jacobian matrisen for systemet i figur 1 og finn de singulære konfigurasjonene samt vis at de er singulære basert på Jacobian matrisen.

---

5) (25%) Hva menes med dynamikken til et system? Forklar hvorfor det er viktig å kjenne dynamikken til en robot som skal styres.

a. Euler-Lagrange likningen for bevegelse er :

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial L}{\partial q_j} = \tau_j$$

Forklar de enkelte leddene i likningen.

b. Vis/forklar hvordan Euler-Lagrange likningen, vist i oppgave 5a, for en robot kan skrives på formen:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial k}{\partial \dot{q}_j} - \frac{\partial k}{\partial q_j} + \frac{\partial p}{\partial q_j} = \tau_j$$

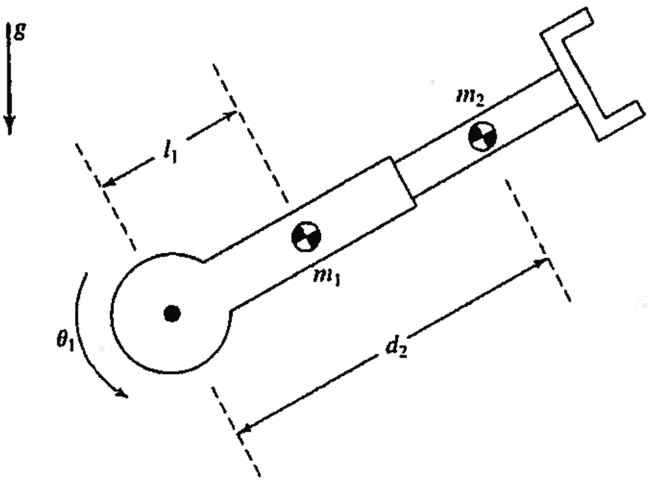
c. Sett opp bevegelseslikningene til roboten i figur 2 ved å benytte likningen fra oppgave 5b.(Tenk deg friksjonsfrie ledd, og at leddvariablene er θ_1 og d_2, massesentrene (C_1 og C_2) til hver armlenke med totalmasse på hhv m_1 og m_2 er markert med svart/hvit sirkel, treghetsmatrisene for lenke 1 og 2 er diagonale og gitt i forhold til massesentrene som vist i figur 2)

d. Sett opp bevegelseslikningene fra oppgave 5c. på matriseform som under. Hva blir matrisene D, V og G? Hva uttrykker D, V og G matrisene i den dynamiske bevegelseslikningen fysisk?

$$D(q)\ddot{q} + V(q,\dot{q}) + G(q) = \tau$$

hvor $V(q,\dot{q})$ tilsvarer $C(q,\dot{q})\dot{q}$

Hvordan ville dere gått frem for å skille ut den deriverte av leddvinkelen som i $C(q,\dot{q})\dot{q}$?



$$c_1 I_1 = \begin{bmatrix} I_{xx1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz1} \end{bmatrix},$$

$$c_2 I_2 = \begin{bmatrix} I_{xx2} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz2} \end{bmatrix},$$

Figur 2: 2DOF robot

---

6) (5%) Laplacetransformér bevegelseslikningene for systemet i oppgave 5d når de er gitt på formen: $D(q)\ddot{q} + C(q,\dot{q})\dot{q} + G(q) = \tau$

Sett opp det laplacetransformerte tilbakekoplede systemet med PDI-regulator skjematisk. Hva menes med et Single-Input Single-Output system (SISO-system). Hva gjør systemet i figur 2 uegnet til å styres som et Single-Input Single-Output system (SISO-system)?